Реферат по курсу «Непрерывные математические модели»

Автор: Шендяпин А.С., 511 группа

1. Горизонтальные колебания массивного цилиндра на жесткой пружине.

Предположим, что имеется цилиндр большой массы и радиуса . Цилиндр закреплен на пружине жесткости и совершает горизонтальные колебания, вращаясь без проскальзывания по гладкой поверхности. Пружина при этом не провисает.

Пусть цилиндр отклонился от положения равновесия на расстояние , угловая скорость его вращения равна *ω*, а линейная скорость движения – .

Тогда по второму закону Ньютона движение цилиндра описывается уравнением:

Силу трения найдем из уравнения динамики вращательного движения твердого тела:

где - угловое ускорение вращения, - сумма моментов всех внешних сил (поскольку сумма моментов внутренних по третьему закону Ньютона равна нулю), - момент инерции тела относительно оси вращения. Для однородного сплошного цилиндра длины он равен

*,* поскольку только сила трения действует на цилиндр по оси его движения и имеет ненулевое плечо . Поскольку цилиндр движется без проскальзывания, его угловая скорость связана с линейной соотношением . Сила трения направлена в сторону, противоположную направлению скорости цилиндра, и равна по модулю:

Тогда по второму закону Ньютона и в силу того, что получаем:

Данный результат можно получить также, воспользовавшись законом сохранения энергии. Так, кинетическая энергия цилиндра равна , где - момент инерции тела относительно оси вращения.

Поскольку цилиндр движется без проскальзывания, его угловая скорость связана с линейной соотношением , кинетическая энергия цилиндра принимает вид

Потенциальная энергия цилиндра равна , тогда лагранжиан системы равен

Подставим полученный лагранжиан в уравнение Лагранжа-Эйлера:

Получаем дифференциальное уравнение вида - уравнение гармонических колебаний, где. Решением этого уравнения является функция .

1. Обоснование закона всемирного тяготения.

В 1660-х годах Исаак Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения, закон, описывающий гравитационное взаимодействие в рамках классической механики.

В начале 17-го века Иоганном Кеплером были интуитивно подобраны соотношения, описывающие идеализированные гелиоцентрические орбиты планет. Законы Кеплера, как их назовут позднее, были сформированы на основе наблюдений датского астронома Тихо Браге. Однако, как выяснилось позднее, третий из них, постулирующий, что квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет, оказался не совсем точным, и был исправлен Исааком Ньютоном. Тем не менее, именно из третьего закона Кеплера, описывающего подобие движения планет, Ньютон сделал вывод, что сила взаимодействия двух тел обратно пропорциональна квадрату расстояний между ними.

Рассмотрим класс движений, обладающих механическим подобием. Пусть потенциальная энергия движения представлена однородной функцией координат частиц, степени однородности :

Тогда, сделав замену переменных , получим следующее равенство для функции Лагранжа замкнутой системы материальных точек:

где . Если предположить, что , или , то получим

что означает, что в старых и новых переменных уравнения движения имеют один и тот же вид, а траектории движения геометрически подобны. При этом времена движения соотносятся как

что по формулировке сильно напоминает третий закон Кеплера, также постулирующий подобие движения планет. Отсюда можно предположить, что потенциальная энергия системы материальных точек принадлежит к классу рассмотренных однородных функций степени однородности , т. к. в третьем законе Кеплера , откуда .

Рассмотрим систему из двух материальных точек массами и , и радиус-векторами . Пусть потенциальная энергия зависит только от расстояния между данными точками, тогда функция Лагранжа для этой системы выглядит следующим образом:

Поместив начало отсчета в центр инерции системы, получим , а перейдя к вектору расстояния между точками , получим выражения через . Заметим, что, перейдя к обозначениям и , мы получим функцию Лагранжа движения материальной точки приведенной массы во внешнем центральном потенциальном поле:

Угловой момент материальной точки по определению равен , где – ее импульс, а – радиус-вектор. Тогда площадь , заметаемая радиус-вектором за время , равна

где - угол между векторами .

Найдем производную момента импульса точки по времени:

поскольку вектор F всегда параллелен вектору r, а вектор v – вектору p, а векторное произведение параллельных векторов равно нулю. Отсюда следует, что момент импульса является константой по времени, что, в свою очередь, означает постоянство скорости заметания площадей радиус-вектором и истинность второго закона Кеплера, также называемого законом площадей.

Поскольку функция потенциальной энергии является однородной функцией степени -1 одной переменной, то она представима в форме

Потенциальная энергия не меняется при смене мест масс . Однако для того, чтобы определить вид функции необходимо сделать следующее предположение: пусть изменение массы одного из тел в раз приводит к изменению в раз силы притяжения между ними. Доказать этот факт не представляется возможным не только для небесных тел, но и для Земли и какого-либо тела, которое можно было бы взять для эксперимента.

В самом деле, вес Земли во много раз превышает вес такого тела, то есть , ԑ<<1. Если взять разложение функции по ԑ в точке 0, получим

то есть в силу малости невозможно отличить величину от погрешности эксперимента.

Тогда, принимая данное предположение, получаем, что

что означает равенство . То есть функция не зависит от массы , и, в силу того, что сила не изменится при замене масс двух тел друг на друга, и от массы тоже. Таким образом, является абсолютной постоянной, равной, из экспериментов Кавендиша, .

Итак, закон всемирного тяготения формулируется следующим образом: сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками массами прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния *r* между ними: